Cours de Mathématiques
PCSI

14 septembre 2006

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Un peu de théorie

Théorème des gendarmes :

Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ et $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$ alors $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$

Passage d'inégalités à la limite :

Si $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant v_n$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_2$ alors $l_1 \leqslant l_2$

Définition :

- $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
- $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Définition :

Soit x_0 au bord de D avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0

- $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$
- $f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$

Proposition :

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n = o(\mu v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ alors $w_n u_n \sim w_n v_n$
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $w_n u_n = o(w_n v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$
- Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$ alors $u_n + u'_n = o(v_n)$

1.2 Calculs effectifs

DLs usuels :

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
4. $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$
5. $\frac{1}{1-v} = 1 + v + v^2 + o(v^2)$
6. $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}u^3 + o(u^3) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

7. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

Lemme

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$

Lemme

Si $f(t) \sim g(t)$ et $g(t) \longrightarrow 0^+$ alors $\ln f(t) \sim \ln g(t)$

<u>Preuve :</u>

$$\begin{aligned}
\ln f(t) \sim \ln g(t) &\iff \tfrac{\ln f(t)}{\ln g(t)} \longrightarrow 1 \\
&\iff \tfrac{\ln f(t)}{\ln g(t)} - 1 \longrightarrow 0 \\
&\iff \tfrac{\ln f(t) - \ln g(t)}{\ln g(t)} \longrightarrow 0 \\
&\iff \tfrac{\ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)}{\ln g(t)} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Or $f(t) \sim g(t) \iff \frac{f(t)}{g(t)} \longrightarrow 1$ donc $\ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) \longrightarrow 0$
De plus $\ln g(t) \longrightarrow -\infty$ car $g(t) \longrightarrow 0^+$
Donc $\frac{\ln\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)}{\ln g(t)} \longrightarrow 0$ d'où $\ln f(t) \sim \ln g(t)$ si $f(t) \sim g(t)$ et $g(t) \longrightarrow 0^+$ ■

♣ Exercice

Déterminer la limite en $+\infty$ de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ puis de $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ puis $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$$

•

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = e^{n(\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

car $n(\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})) \sim \frac{1}{n} \to 0$ •

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n^2(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $n^2(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) \sim -n \to -\infty$ •

Chapitre 2

Mise au point prétaupinale

2.1 Rédiger une récurrence

- Énoncer soigneusement la porposition $\mathcal{P}(n)$
- Initialisation
- Hérédité
- Conclure par le principe de récurrence

$\blacksquare$

2.2 Formules trigonométriques

Rappel

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Dérouler le formulaire

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b + i(\cos a\sin b + \cos b\sin a)$$

Donc en identifiant parties réelles et parties imaginaires :

$$\spadesuit \quad \cos(a+b) = \Re(e^{i(a+b)}) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\spadesuit \quad \sin(a+b) = \Im(e^{i(a+b)}) = \cos a\sin b + \cos b\sin a$$

$$\spadesuit \quad \cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\spadesuit \quad \sin(2a) = \sin(a+a) = 2\cos a\sin a$$

$$\spadesuit \quad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\spadesuit \quad \sin(a-b) = \cos b\sin a - \cos a\sin b$$

$$\spadesuit \quad \tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cos a\sin b + \cos b\sin a}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} = \frac{\sin b + \tan a\cos b}{\cos b - \tan a\sin b} = \frac{\tan b + \tan a}{1 - \tan a\tan b}$$

$$\spadesuit \quad \tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\cos b\sin a - \cos a\sin b}{\cos a\cos b + \sin a\sin b} = \frac{\tan a\cos b - \sin b}{\cos b + \tan a\sin b} = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

$$\spadesuit \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\spadesuit \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\spadesuit \quad \sin a\cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$
$$\spadesuit \quad \cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$
$$\spadesuit \quad \sin a\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

cos, sin et tan en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$:

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

donc

$$\cos^2\frac{\theta}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2}) = 1 \Longrightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

or $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$ donc :

$$\spadesuit \qquad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

donc

$$\spadesuit \qquad \sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

donc

$$\spadesuit \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

♣ Exercice

Calculer $\cos u + \cos v$

$\cos u + \cos v = \Re(e^{iu}+e^{iv})$

donc

$$\begin{aligned} e^{iu}+e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\frac{u-v}{2}}+e^{i\frac{v-u}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\frac{u-v}{2}}+e^{-}iu-v2\right) \\ &= \left(\cos(\frac{u+v}{2})+i\sin(\frac{u+v}{2})\right)\left(\cos(\frac{u-v}{2})+i\sin(\frac{u-v}{2})+cos(-\frac{u-v}{2})+i\sin(-\frac{u-v}{2})\right) \\ &= \left(\cos(\frac{u+v}{2})+i\sin(\frac{u+v}{2})\right)\left(2\cos(\frac{u-v}{2})\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \cos u+\cos v &= \Re\left(2\left(\cos(\frac{u+v}{2})+i\sin(\frac{u+v}{2})\right)\left(\cos(\frac{u-v}{2})\right)\right) \\ &= 2\cos(\frac{u+v}{2})\cos(\frac{u-v}{2}) \end{aligned}$$

♣ Exercice

Résoudre $\cos x+\cos 2x+\cos 3x \geqslant 0$ *sur* $[0;\pi]$

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x = \Re\left(e^{ix}+e^{i2x}+e^{i3x}\right)$$

or

$$\begin{aligned} e^{ix}+e^{i2x}+e^{i3x} &= e^{ix}\left(1+e^{ix}+e^{i2x}\right) \\ &= e^{ix}\left(1+e^{ix}+(e^{ix})^2\right) \end{aligned}$$

donc pour $x \neq 0$

$$e^{ix}+e^{i2x}+e^{i3x} = e^{ix}\left(\frac{1-e^{i3x}}{1-e^{ix}}\right)$$

or

$$\begin{aligned}
1 - e^{i3x} &= e^{i\frac{3x}{2}} \left(e^{-i\frac{3x}{2}} - e^{i\frac{3x}{2}} \right) \\
&= e^{i\frac{3x}{2}} \left(\cos(-\frac{3x}{2}) - i\sin(\frac{3x}{2}) - \cos(\frac{3x}{2}) - i\sin(\frac{3x}{2}) \right) \\
&= e^{i\frac{3x}{2}} \left(-2i\sin(\frac{3x}{2}) \right)
\end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned}
1 - e^{ix} &= e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \right) \\
&= e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i\sin(\frac{x}{2}) \right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
e^{ix} \left(\frac{1 - e^{i3x}}{1 - e^{ix}} \right) &= e^{ix} \left(\frac{e^{i\frac{3x}{2}} \left(-2i\sin(\frac{3x}{2}) \right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i\sin(\frac{x}{2}) \right)} \right) \\
&= e^{i2x} \left(\frac{\sin(\frac{3x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \cos(2x) \left(\frac{\sin(\frac{3x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)$$

On conclut par une étude de signe.

Chapitre 3

Equations différentielles linéaires

3.1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Fait :

$\{y_1 + y_2 \mid y_2 \in S_H\} = S_E$ avec $y_1 \in S_E$

Preuve :

★ $\{y_1 + y_2 \mid y_2 \in S_H\} \subset S_E$

y_1 est une solution particulière fixée de

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d$$

Soit $y \in F$ (avec $F = \{y_1 + y_2 \mid y_2 \in S_H\}$), $\exists y_2 \in S_H$; $y = y_1 + y_2$

On a alors $ay'' + by' + cy = a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2)$

donc comme $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$ et $ay_2'' + by_2' + cy_2 = d$ on a $y \in S_E$

d'où $F \subset S_E$

★ $\{y_1 + y_2 \mid y_2 \in S_H\} \supset S_E$

Soit $y \in S_E$, $ay'' + by' + cy = d$ et $ay_1'' + by_1' + cy_1 = d$

donc $a(y - y_1)'' + b(y - y_1)' + c(y - y_1) = 0$

donc $(y - y_1) \in S_H$ et $y = y_1 + (y - y_1)$

donc $y \in F$ d'où $S_E \subset F$

Conclusion : $S_E = F$ ■

Théorème :

Si a est une application continue sur un intervalle I alors les solutions de $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sont les applications $t \mapsto Ke^{-A(t)}$ avec $K \in \mathbb{R}$ et A une primitive de a

Théorème :

$S_E \neq \emptyset$

Preuve :

Soit A une primitive de a. Il suffit de prendre pour K une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ pour avoir $y' + ay = b$ ■

3.2 Equations différentielles d'ordre 2

Proposition :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{(H)}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{C}$$

- Si (C) possède 2 solutions réelles $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$S_{H,\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \mid K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{H,\mathbb{C}} = \left\{ t \mapsto K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \mid K_1, K_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

- Si (C) possède 2 solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$S_{H,\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto C_1 \cos(\beta t) e^{\alpha t} + C_2 \sin(\beta t) e^{\alpha t} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{H,\mathbb{C}} = \left\{ t \mapsto K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \mid K_1, K_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

- Si (C) possède une racine double λ_0

$$S_{H,\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto K_1 e^{\lambda_0 t} + K_2 t e^{\lambda_0 t} \mid K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_{H,\mathbb{C}} = \left\{ t \mapsto K_1 e^{\lambda_0 t} + K_2 t e^{\lambda_0 t} \mid K_1, K_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

Proposition :

Si $ay'' + by' + cy = P(t)e^{\lambda_0 t}$ avec a, b, c constantes réelles, P application polynomiale et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ alors il existe une solution particulière de la forme $y(t) = Q(t)e^{\lambda_0 t}$ avec Q une application polynomiale et $\deg Q = \begin{cases} \deg P \text{ lorsque } \lambda_0 \text{ n'est pas racine de (C)} \\ 1 + \deg P \text{ lorsque } \lambda_0 \text{ est racine simple} \\ 2 + \deg P \text{ lorsque } \lambda_0 \text{ est racine double} \end{cases}$

Remarque :

Pour les changements de variable, cf. Appendice A.

Chapitre 4

Corps des complexes

4.1 Calculs dans $\mathbb{C}$

Propriété :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Proposition :

- Si $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, alors $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1$ et z_2 sont positivement liés

Preuve :

★ Si $\alpha,\ \beta \geqslant 0$ alors $\alpha \leqslant \beta \iff \alpha^2 \leqslant \beta^2$
Or $|z_1 + z_2|$ et $|z_1| + |z_2|\ \geqslant 0$ donc

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \iff |z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 \tag{I}$$

- Comme $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,

$$\begin{aligned}(I) &\iff (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \leqslant z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + 2|z_1| \cdot |z_2| \\ &\iff z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \leqslant z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + 2|z_1| \cdot |z_2| \\ &\iff z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \leqslant 2|z_1| \cdot |z_2| \\ &\iff Z + \overline{Z} \leqslant 2Z\end{aligned}$$

En posant $Z = z_1\overline{z_2}$

$$\iff \Re(Z) \leqslant |Z|$$

Ce qui est vérifié puisque $a^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow a \leqslant |a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ en prenant $Z = a + ib$ ■

★

- Supposons que z_1 et z_2 soient positivement liés. Montrons que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
  Si $z_1 = \lambda z_2$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) :

$$|z_1 + z_2| = |\lambda z_2 + z_2| = (\lambda + 1)|z_2| = |\lambda z_2| + |z_2| = |z_1| + |z_2|$$

  Idem si $z_2 = \lambda z_1$
- Supposons $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. On a alors $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$
  c'est-à-dire $\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = 2|z_1||z_2|$
  soit $\Re(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}z_2|$
  $|Z| = \Re(Z) \iff Z \in \mathbb{R}^+$ donc $\overline{z_1}z_2$ est dans $\mathbb{R}^+$
  Si $z_1 = 0$ alors $z_1 = 0 \cdot z_2$
  Si $z \neq 0$ alors $z_2 = \frac{Z}{\overline{z_1}} = \frac{Z}{|z_1|^2} z_1$ avec $Z = \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}^+$ et $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1} \Rightarrow \frac{1}{\overline{z_1}} = \frac{z_1}{|z_1|^2}$

■

4.2 Forme complexe

Définition :

$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$

Proposition 1 :

$\forall \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} \in \mathbb{U}$

Proposition 2 :

Si $z \in \mathbb{U}$, alors $\exists \theta \in [-\pi; \pi]$ tel que $z = e^{i\theta}$

Preuve :

Soit $z = a + ib$. On a $|z|^2 = 1 = a^2 + b^2$. On cherche θ tel que $\cos\theta = a$ et $\sin\theta = b$

$a^2 \leqslant a^2 + b^2 = 1$ donc $-1 \leqslant a \leqslant 1$, donc $\exists \varphi \in [0; \pi]$ tel que $\cos\varphi = a$

$b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$ donc

$$\left\{\begin{array}{l} b = \sin\varphi \rightarrow z = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \\ \text{ou} \\ b = -\sin\varphi \rightarrow z = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{i(-\varphi)}\ ,\ (-\varphi) \in [-\pi; 0] \end{array}\right.$$

■

Chapitre 5

Géométrie dans le plan et l'espace

Chapitre 6

Courbes paramétrées du plan

Chapitre 7

Réels , Suites

Chapitre 8

Notions de base

Chapitre 9

Continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Chapitre 10

Dérivabilité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Chapitre 11

Algèbre des polynômes

Chapitre 12

Décomposition des fractions rationnelles

Chapitre 13

Algèbre linéaire en dimension finie

Chapitre 14

Matrices

Chapitre 15

Fonctions convexes

Chapitre 16

Intégration des fonctions continuez sur un segment

Chapitre 17

Intégrales impropres

Chapitre 18

Espaces euclidiens

Chapitre 19

Systèmes linéaires - déterminants

Chapitre 20

Groupe orthogonal en petite dimension

Chapitre 21

Espaces affines euclidiens

Chapitre 22

Rectification et courbure

Chapitre 23

Fonctions de plusieurs variables

Annexe A

Equations différentielles - le retour

Annexe B

Techniques d'approximation en analyse

Annexe C

Reliquats de géométrie

Annexe D

Reliquats algébriques

Annexe E

Vingt-cinq exercices et théorèmes